88107227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Lunes 15 de noviembre de 2010 (tarde)

1 hora

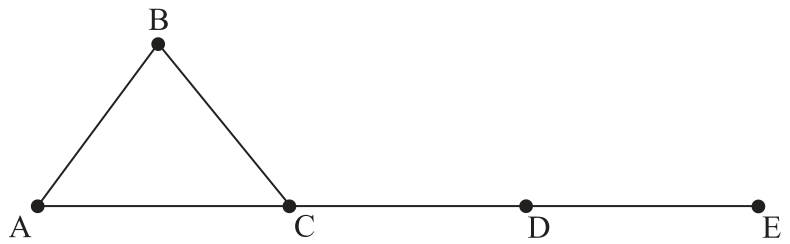
INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

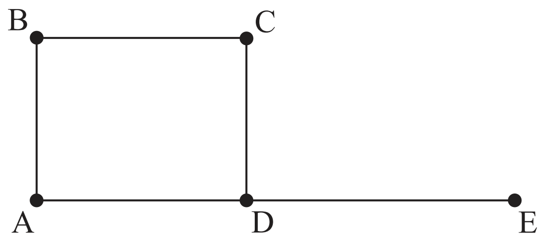
Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 12]*

(a) (i) Para los dos grafos siguientes, escriba el grado de cada vértice.



Grafo *G*



Grafo *H*

(ii) ¿Son G y H grafos isomorfos? Justifique su respuesta. *[4 puntos]*

(b) (i) Un grafo es simple, planario y conexo. Escriba la desigualdad que relaciona v y e. Dé la condición que debe satisfacer v para que esta desigualdad se cumpla.

(ii) Dibuje aproximadamente un grafo simple, conexo y planario con $v = 2$ para el cual no se cumpla la desigualdad del apartado (b)(i).

(iii) Dibuje aproximadamente un grafo simple, conexo y planario con $v = 1$ para el cual no se cumpla la desigualdad del apartado (b)(i).

(iv) Sea un grafo conexo y planario con v vértices, v^2 aristas y 8 caras. Halle v. Dibuje aproximadamente un grafo que cumpla todas estas condiciones. *[8 puntos]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Halle la solución general para el siguiente sistema de congruencias.

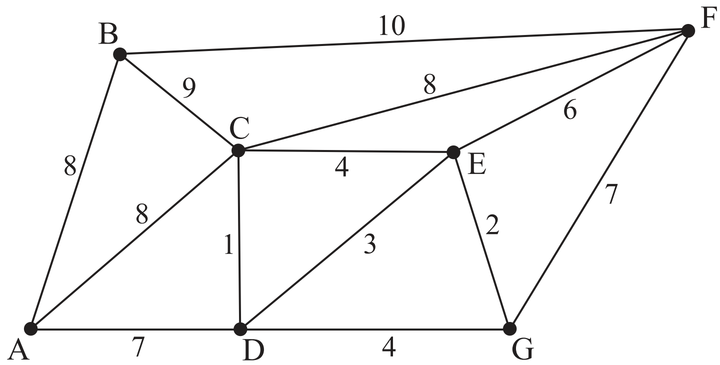
$$N \equiv 3 \pmod{11}$$
$$N \equiv 4 \pmod{9}$$
$$N \equiv 0 \pmod{7}$$

[9 puntos]

(b) Halle todos los valores de N tales que $2000 \le N \le 4000$. *[2 puntos]*

3. *[Puntuación máxima: 12]*

Considere el siguiente grafo ponderado.



(a) (i) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar el árbol generador minimal. Indique en qué orden va eligiendo las aristas, y dibuje con precisión el árbol generador final.

(ii) Escriba el peso total de este árbol generador minimal. *[8 puntos]*

(b) Dibuje aproximadamente un árbol generador con el máximo peso total y escriba dicho peso. *[4 puntos]*

4. *[Puntuación máxima: 11]*

(a) Escriba el pequeño teorema de Fermat. *[2 puntos]*

(b) En base 5, la representación de un número natural X es $\left(k00013(5-k)\right)_5$.
Esto significa que $X = k \times 5^6 + 1 \times 5^2 + 3 \times 5 + (5-k)$.

En base 7, la representación de X es $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_7$.

Halle a_0. *[5 puntos]*

(c) Sabiendo que $k = 2$, halle X en base 7. *[4 puntos]*

5. *[Puntuación máxima: 14]*

(a) Un grafo tiene n vértices de grados 1, 2, 3, …, n. Demuestre que, o bien $n \equiv 0 \pmod 4$ o bien $n \equiv 3 \pmod 4$. *[6 puntos]*

(b) Sea G un grafo simple de n vértices, $n \geq 2$. Demuestre, por contradicción, que al menos dos de los vértices de G tienen que tener el mismo grado. *[8 puntos]*